Цифровая схемотехника
Синтез логических схем

КУРС ЛЕКЦИЙ

ЧУ ПО «СОЦИАЛЬНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ»

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: БОРИСОВ АЛЕКСЕЙ АЛЬБЕРТОВИЧ

RAZUMDOM

СОЦИАЛЬНО ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ

Синтез цифровых схем

1. Функции двух переменных
2. Законы алгебры логики
3. Представление логических функций
4. СДНФ, СКНФ
5. Минтермы, макстермы
6. Минимизация логических функций
7. Карты Карно
8. Синтез схем по заданной функции

Функции двух переменных

a b	1 0 1 0 1 1 0 0	Логическое выражение $f(a, b)$	Наименование
0	0 0 0 0	$f_0 = 0$	константа 0
1	0 0 0 1	$f_1 = \overline{a \vee b}$	операция ИЛИ- НЕ, стрелка Пирса
2	0 0 1 0	$f_2 = a \wedge \overline{b}$	запрет по b
3	0 0 1 1	$f_3 = \overline{b}$	инверсия b
4	0 1 0 0	$f_4 = \overline{a} \wedge b$	запрет по a
5	0 1 0 1	$f_5 = \overline{a}$	инверсия a
6	0 1 1 0	$f_6 = a\overline{b} \vee \overline{a}\, b$	исключающее ИЛИ, неравнозначность
7	0 1 1 1	$f_7 = \overline{a \wedge b}$	операция И – НЕ, штрих Шеффера
8	1 0 0 0	$f_8 = a \wedge b$	конъюнкция, логическое И
9	1 0 0 1	$f_9 = a\, b \vee \overline{a}\, \overline{b}$	равнозначность, эквивалентность
10	1 0 1 0	$f_{10} = a$	переменная a
11	1 0 1 1	$f_{11} = a \vee \overline{b}$	импликация от b к a
12	1 1 0 0	$f_{12} = b$	переменная b
13	1 1 0 1	$f_{13} = \overline{a} \vee b$	импликация от a к b.
14	1 1 1 0	$f_{14} = a \vee b$	дизъюнкция, логическое ИЛИ
15	1 1 1 1	$f_{15} = 1$	константа 1

Законы алгебры логики

В алгебре логики установлен целый ряд законов, с помощью которых возможно преобразование логических функций (ЛФ):

Конъюнкция: И, ^, &, * **Дизъюнкция: ИЛИ, ˅, |, +**

- **коммутативный** (переместительный)

X ^ Y = Y ^ X X ˅ Y = Y ˅ X

- **ассоциативный** (сочетательный)

(X & Y) & Z=(X & Z) & Y=X & (Y & Z) (X | Y) | Z=(X | Z) | Y=X | (Y | Z)

- **дистрибутивный** (распределительный)

X & (Y | Z)= X & Y | X & Z X | Y & Z = (X | Y) & (X | Z)

- **Закон свёртки**

$X \mid \overline{X}F = X \mid F \qquad X(\overline{Y} \mid F) = XF$

Где F - логическая функция общего вида, не зависящая от переменных

Законы алгебры логики

В алгебре логики установлен целый ряд законов, с помощью которых возможно преобразование логических функций (ЛФ):

- **Закон поглощения**

$X \mid XY = X \qquad X(X|Y) = X$

- **Закон склеивания**

$XY \mid X\overline{\mathrm{Y}} = X \qquad (X \mid Y)(X \mid \overline{\mathrm{Y}}) = X$

$FX \mid F\overline{\mathrm{X}} = F \qquad (\mathrm{X} \mid \mathrm{F})(\overline{\mathrm{X}} \mid F) = X$

- **Правило де Моргана**

$\overline{\mathrm{X} \mid \mathrm{Y}} = \overline{\mathrm{X}} \,\&\, \overline{\mathrm{Y}} \qquad \overline{\mathrm{X} \,\&\, \mathrm{Y}} = \overline{\mathrm{X}} \mid \overline{\mathrm{Y}}$

Где F - логическая функция общего вида, не зависящая от переменных

Представление логических функций (ЛФ)

3 способа представления логических функций:

1. графиком (в виде временной диаграммы напряжения);
2. аналитическим (булевым выражением);
3. таблицей истинности.

В аналитическом виде ЛФ может быть представлена различными сочетаниями операций сложения и умножения переменных. Однако наиболее удобно представлять ЛФ в двух формах записи:

1) как суммы произведений переменных:

$$Y + \overline{X}Y + X\overline{Y}Z + \overline{X}Y\overline{Z}$$

Такая запись функции называется **дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)**.

2) как произведения сумм переменных:

$$Y(\overline{X} + Y)(X + \overline{Y} + Z)(\overline{X} + Y + \overline{Z})$$

Такая запись функции называется **конъюнктивной нормальной формой (КНФ)**.

Синтез цифровых схем

Переход от одной формы записи функции к другой осуществляется инверсией функции по теореме де Моргана. Например, логическая функция дана в ДНФ:

$$F = Y + \bar{X}Y + X\bar{Y}Z$$

$$\boxed{\begin{gathered}\overline{X+Y} = \bar{X}\cdot\bar{Y}\\ \overline{X\cdot Y} = \bar{X}+\bar{Y}\end{gathered}}$$

Инвертируем и получаем функцию в КНФ:

$$\bar{F} = \overline{Y + \bar{X}Z + X\bar{Y}Z} = (\bar{Y})(\overline{\bar{X}Z})(\overline{X\bar{Y}Z}) = \bar{Y}(X + \bar{Z})(\bar{X} + Y + \bar{Z}).$$

Пользуясь законами логики, можно любую ЛФ преобразовать к ДНФ и КНФ. Для одной и той же ЛФ может существовать несколько равносильных дизъюнктивных и конъюнктивных форм. Однако существует только один вид ДНФ и КНФ, в которых функция может быть записана единственным образом – это ***совершенные нормальные формы***.

В ***совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ)*** каждое слагаемое содержит произведение всех переменных и/или их отрицаний и нет одинаковых слагаемых.

В ***совершенной конъюнктивной нормальной форме (СКНФ)*** каждый сомножитель содержит суммы всех переменных и/или их отрицаний и нет одинаковых сомножителей.

Наиболее наглядно и полно логическая функция представляется таблицей истинности. Переход от аналитического выражения ЛФ к таблице истинности осуществляется определением значения функции для всех вариантов сочетания значений переменных функции (т.е. **методом перебора**).

Синтез цифровых схем

№ комб.	X	Y	Z	F
1	0	0	0	0
2	0	0	1	1
3	0	1	0	1
4	0	1	1	0
5	1	0	0	0
6	1	0	1	0
7	1	1	0	1
8	1	1	1	0

Рассмотрим на примере переход от табличной формы представления функции к аналитической записи ее в СДНФ или СКНФ.
Пусть функция задана таблицей истинности.
Функция *F*=1 (истинна) в комбинациях переменных 2,3,7.

$$\overline{X}\,\overline{Y}Z = 1, \quad \overline{X}Y\overline{Z} = 1, \quad XY\overline{Z} = 1$$

Комбинации переменных, при которых функция истинна называют **минтермами**.

Функция в СДНФ есть сумма комбинаций переменных, при которых функция истинна, т.е.

$$F = \overline{X}\,\overline{Y}Z + \overline{X}Y\overline{Z} + XY\overline{Z}$$

Функцию можно представить не только единичными, но и нулевыми значениями.

Функция $F = 0$ (ложна) или $\overline{F} = 1$, если

$$\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} = 0, \quad \overline{X}YZ = 0, \quad X\overline{Y}\,\overline{Z} = 0, \quad X\overline{Y}Z = 0, \quad XYZ = 0.$$

$$\overline{F} = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}YZ + X\overline{Y}\,\overline{Z} + X\overline{Y}Z + XYZ.$$

Комбинации переменных, при которых функция ложна называют **макстермами**.

Воспользовавшись теоремой де Моргана, получаем функцию в СКНФ:

$$F = (X + Y + Z)(X + \overline{Y} + Z)(\overline{X} + Y + Z)(\overline{X} + Y + \overline{Z})(\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}).$$

Минимизация логических функций

Сложность логической функции, а отсюда сложность и стоимость реализующей ее схемы (цепи), пропорциональны числу логических операций и числу вхождений переменных или их отрицаний. Поэтому более целесообразно использовать специальные алгоритмические методы минимизации, позволяющие проводить упрощение функции более просто, быстро и безошибочно. К таким методам относятся, например,

метод Квайна,

метод карт Карно,

метод испытания импликант,

метод импликантных матриц,

метод Квайна-Мак-Класки и др.

Эти методы наиболее пригодны для обычной практики, особенно минимизация логической функции с использованием карт Карно. Метод карт Карно сохраняет наглядность при числе переменных не более шести. В тех случаях, когда число аргументов больше шести, обычно используют метод Квайна-Мак-Класки.

Методы минимизации логических функций

Минимизация – упрощение формы записи логической функции, направленное на устранение избыточности в записи функции.

При синтезе логических схем минимизированная функция реализуется с наименьшим числом логических элементов.

Минимизация производится:

1. алгебраическими способами;
2. методом карт Карно.

1. Использование законов булевой алгебры:

а) добавление существующих слагаемых: $X + X + X = X$;

б) умножение отдельных слагаемых на функцию вида: $X + \overline{X} = 1$;

в) выделение слагаемых вида: $X + \overline{X} = 1$.

Пример.

$$\overline{X}YZ + X\overline{Y}Z + XY\overline{Z} + XYZ = \underline{\overline{X}YZ} + \underline{\underline{X\overline{Y}Z}} + \underline{\underline{\underline{XY\overline{Z}}}} + \underline{XYZ} + \underline{\underline{XYZ}} + \underline{\underline{\underline{XYZ}}} =$$

$$= YZ(\overline{X}+X) + XZ(\overline{Y}+Y) + XY(\overline{Z}+Z) = YZ + XZ + XY.$$

Преобразование алгебраическими способами требует громоздких математических выкладок и больших временных затрат. Существуют приемы, основанные на правилах алгебры логики, позволяющие минимизировать функцию более быстро и просто (и даже безошибочно!)

Минимизация логических функций при помощи карт Карно

Карта Карно — графический способ минимизации переключательных (булевых) функций, обеспечивающий относительную простоту работы с большими выражениями и устранение потенциальных гонок. Представляет собой операции попарного неполного склеивания и элементарного поглощения. Карты Карно рассматриваются как перестроенная соответствующим образом таблица истинности функции. Карты Карно можно рассматривать как определенную плоскую развертку n-мерного булева куба.

В карту Карно булевы переменные передаются из таблицы истинности и упорядочиваются с помощью кода Грея, в котором каждое следующее число отличается от предыдущего только одним разрядом.

Карты Карно были изобретены в 1952 Эдвардом В. Вейчем и усовершенствованы в 1953 Морисом Карно, физиком из «Bell Labs».

Методы минимизации логических функций

2. Метод карт Карно (или диаграммы Вейча)

Метод используется для минимизаций функций с числом переменных до 5-6.

Карты Карно представляют собой таблицу, в которую заносятся значения всех возможных комбинаций переменных.

Количество полей в таблице составляет 2^n, где n – количество переменных.

«1» - прямое значение переменной;
«0» - инверсное значение переменной.

	A: 0	1
B: 0	$\bar{A}\bar{B}$	$A\bar{B}$
1	$\bar{A}B$	AB

Карта Карно из двух переменных

Правила записи карты Карно

1. Разметка вертикальной оси не зависит от разметки горизонтальной.
2. Разметку осей можно начинать с любого сочетания переменных.
3. По каждой оси должны быть перечислены все сочетания переменных.
4. Карта составляется таким образом, чтобы соседние клетки отличались только одной переменной. Соседними клетками также считаются крайние клетки каждого столбца или строки.

Методы минимизации логических функций

Пример 1. $F = AB + A\overline{B}$

	$\overline{A}$	A
$\overline{B}$	0	1
B	0	1

Для каждого сочетания переменных AB в соответствующую ячейку пишется «1».
В незаполненные клетки – «0».
Соседние единицы объединяем в один контур по 2 или 4 или 8 единиц.

Каждый контур – член упрощенного булева выражения.
В примере имеется 1 контур. Это означает, что новое минимизированное выражение будет состоять из одного члена.

В контуре встречается комбинация с B и $\overline{B}$, в соответствии с правилами булевой алгебры B и $\overline{B}$ дополняют друг друга и их можно опустить, т.е. $(B + \overline{B})=1$. Т.о. $F=AB+A\overline{B} = A(B+\overline{B})=A$.

Ответ: $F = A$.

Синтез цифровых схем

Пример 2. $F = AB\overline{C}D + \overline{A}BCD + ABCD$

	$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}B$	AB	$A\overline{B}$
$\overline{C}\overline{D}$	0	0	0	0
$\overline{C}D$	0	0	1	0
CD	0	1	1	0
$C\overline{D}$	0	0	0	0

Карта Карно из четырех переменных

На карте имеется два контура, следовательно новое минимизированное выражение будет состоять из двух членов, связанных функцией ИЛИ.

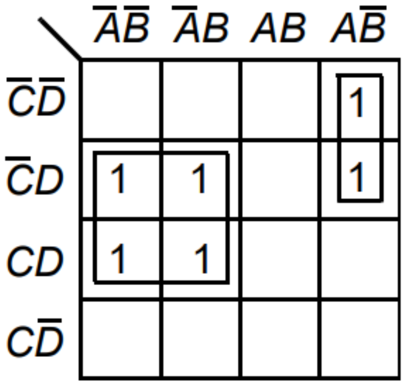
В горизонтальном контуре опускаем $(A+\overline{A})=1$;
в вертикальном контуре опускаем $(C+\overline{C})=1$.
Ответ: $F = BCD + ABD$.

В итоге, получили функцию, форма которой не подлежит дальнейшей минимизации и называется **тупиковой**.

Правила использования карт Карно

1. Нанести на карту Карно единицы в соответствии с заданной функцией (логическая функция должна быть представлена в СДНФ).
2. Объединяем соседние единицы контурами по 2, 4 или 8 клеток.
3. Проводим упрощения, исключая взаимодополняющие переменные внутри контура
4. Оставшиеся члены объединяем функцией ИЛИ. Полученное выражение записываем в ДНФ.

Методы минимизации логических функций



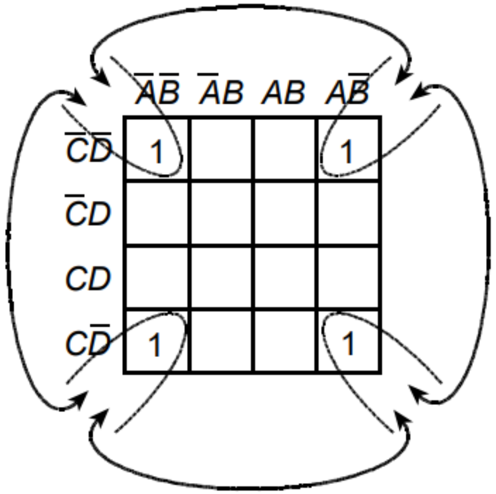
Пример 3.

$$F = A\bar B\bar C\bar D + \bar A B\bar C D + \bar A\bar B\bar C D + \bar A\bar B CD + \bar A BCD + A\bar B\bar C D$$

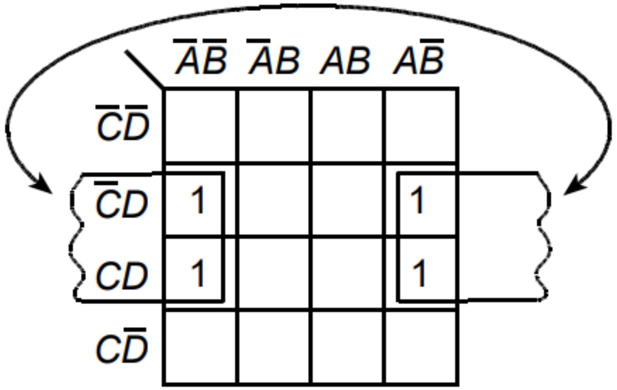
Объединяем в два контура по 2 и 4 единицы.

Результат минимизации: $F = \bar A D + A\bar B\bar C$

Существуют также нестандартные способы построения контуров.



F = *BD*.
Здесь опускаются *A* и $\bar A$ и *C* и $\bar C$.

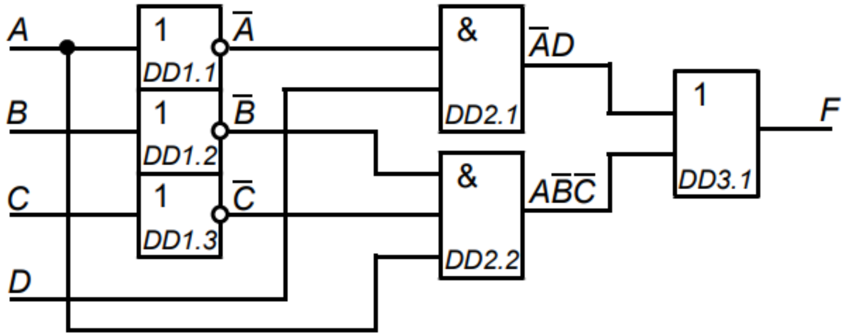


F = $\bar B$*D*.
Здесь опускаются *C* и $\bar C$ и *A* и $\bar A$.

Синтез электронных схем по заданной функции

В результате минимизации: $F = \bar{A}D + A\bar{B}\bar{C}$

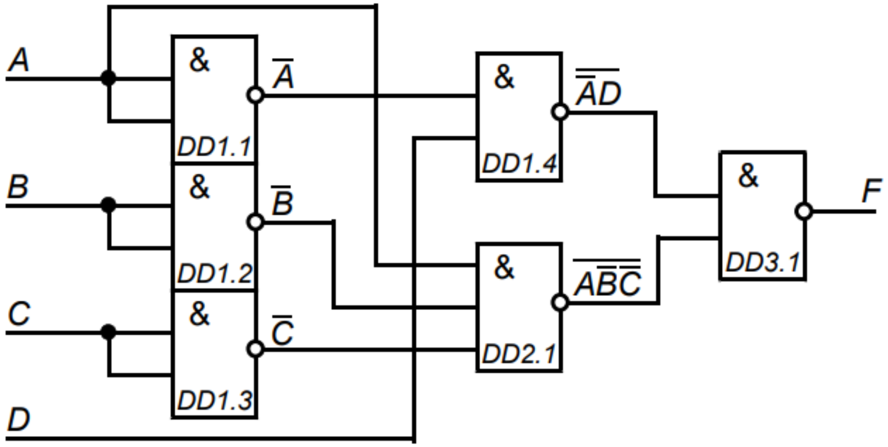
1. Реализация ЛФ в смешанном базисе.



2. Реализация ЛФ в базисе И-НЕ.

Преобразуем функцию к виду, в котором будет использоваться функция И-НЕ.

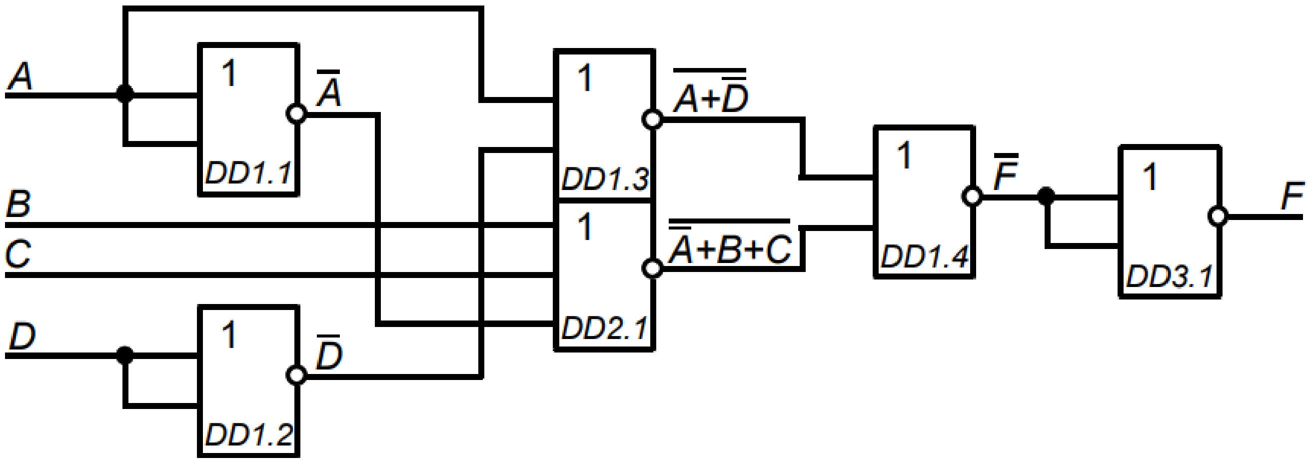
$$F = \overline{\overline{F}} = \overline{\overline{\bar{A}D + A\bar{B}\bar{C}}} = \overline{\overline{\bar{A}D} \cdot \overline{A\bar{B}\bar{C}}}$$



Синтез электронных схем по заданной функции

3. Реализация ЛФ в базисе ИЛИ-НЕ.
Преобразуем функцию к виду, где используется только логическая функция ИЛИ-НЕ.

$$F = \overline{A}D + A\overline{B}\,\overline{C} = \overline{\overline{F}} = \overline{\overline{\overline{A}D}\cdot\overline{A\overline{B}\,\overline{C}}} = \overline{(A+\overline{D})(\overline{A}+B+C)} = \overline{(A+\overline{D})}+\overline{(\overline{A}+B+C)}$$



Спасибо за внимание

ЧУ ПО «Социально-технологический колледж»

Преподаватель: Борисов Алексей Альбертович